Algorithmik: Matrizen

„Zorro spaltet jeden Baum“

ZEILE SPALTE

Was ist eine Matrix?

Rechteckiges Zahlenschema aus $m \cdot n$ Zahlen in m Zeilen und n Spalten

$m \times n$ - **Matrix**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mk} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Zeile

Elemente

Spalte

Elemente einer Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mk} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$a_{i\,k}$$

Zeilenindex **Spaltenindex**

z.B.: $a_{3\,1}$ der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ist: **5**

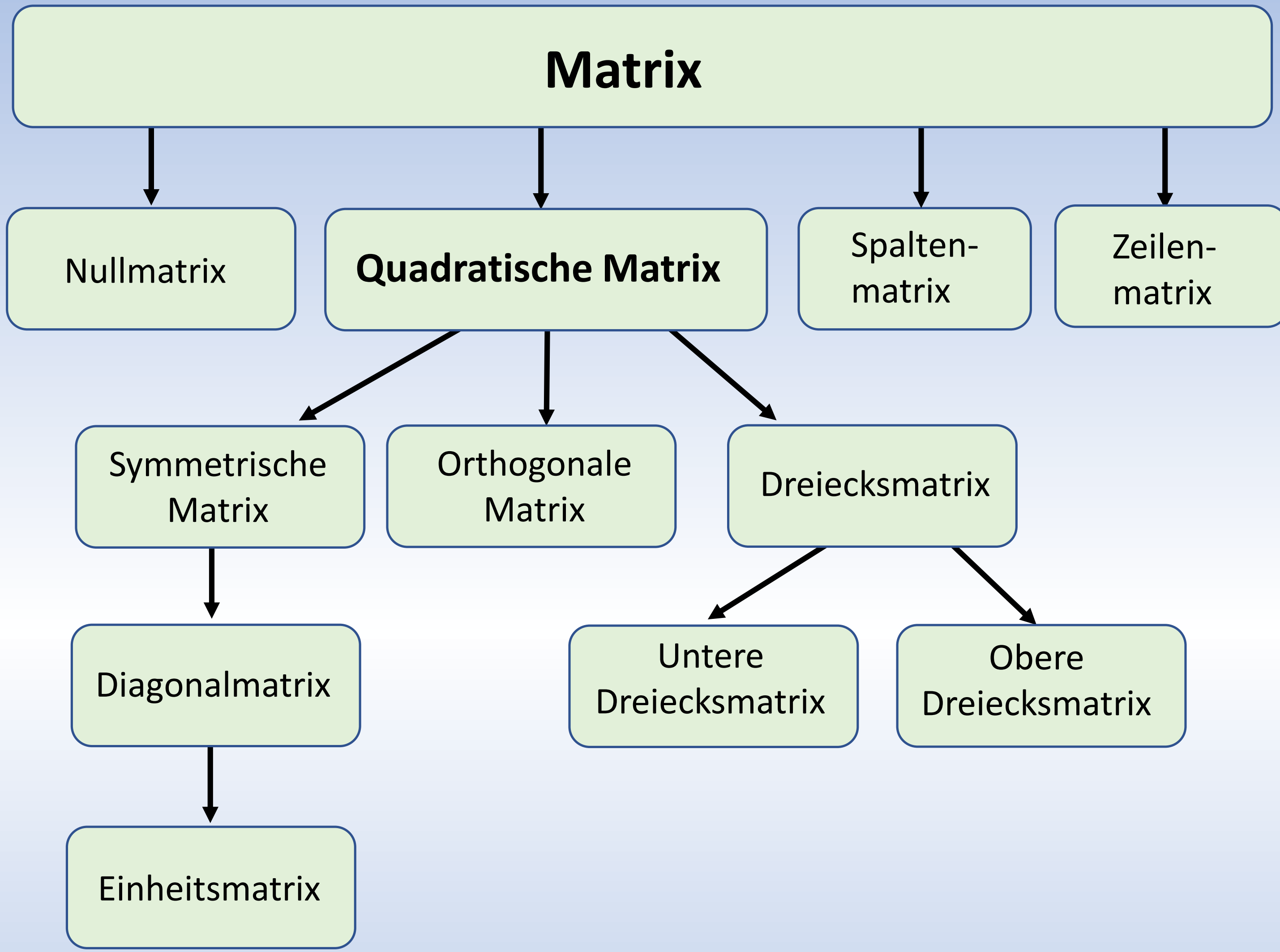
Kurzschreibweise

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mk} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

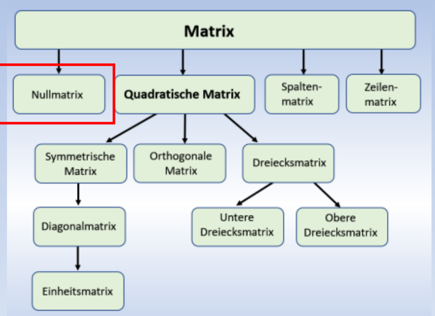
$$\boxed{A = (a_{i\,k})}$$

Menge aller reellen $m \times n$-Matrizen: **M(m × n)** oder **M(m, n)**

Spezielle Matrizen



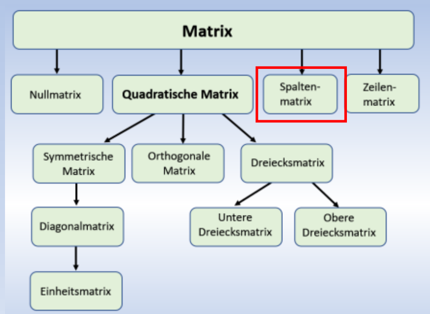
Spezielle Matrizen



Nullmatrix

$$\text{Nullmatrix } 0 := \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in M(m \times n)$$

Spezielle Matrizen



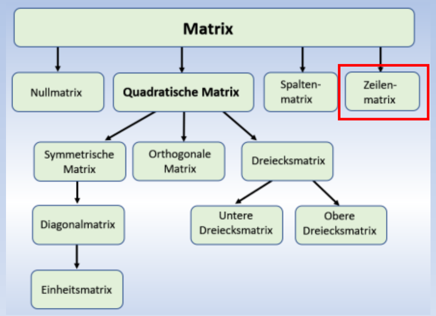
Spalten-
matrix

Eine Spaltenmatrix hat **genau eine** Spalte!

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \in M(m \times 1)$$

Ebenso: $\text{Spaltenvektor} \in \mathbb{R}^m = \text{Matrix} \in M(m \times 1)$

Spezielle Matrizen



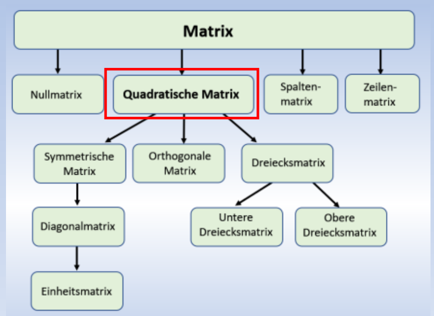
Zeilen-
matrix

Eine Zeilenmatrix hat **genau eine** Zeile!

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix} \in M(1 \times n)$$

Ebenso: $\text{Zeilenvektor} \in \mathbb{R}^n = \text{Matrix} \in M(1 \times n)$

Spezielle Matrizen

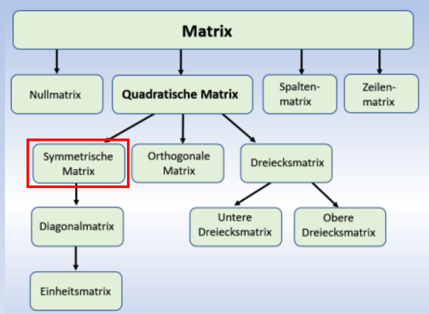


Quadratische Matrix

Eine quadratische Matrix hat genauso viele Zeilen wie Spalten!

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M(n \times n)$$

Spezielle Matrizen



Symmetrische Matrix

Für symmetrische Matrizen gilt:

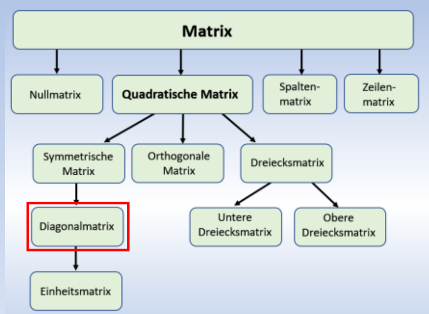
$$a_{k\,i} = a_{i\,k}$$

Beispiele:

$$(2), \quad \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 6 \\ 0 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Nur quadratische Matrizen können symmetrisch sein!

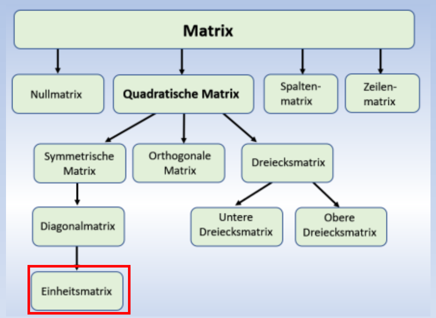
Spezielle Matrizen



Diagonalmatrix

$$\text{Diagonalmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \in M(n \times n)$$

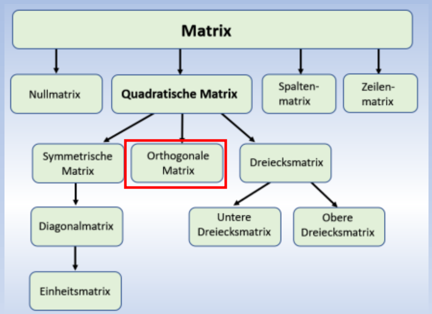
Spezielle Matrizen



Einheitsmatrix

$$\text{Einheitsmatrix } E_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M(n \times n)$$

Spezielle Matrizen



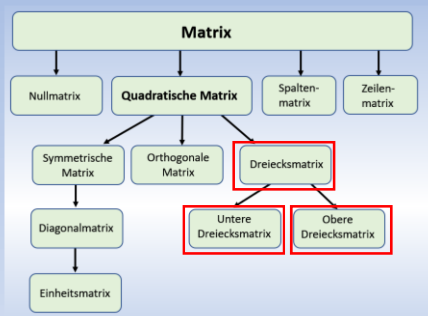
Orthogonale Matrix

Eine Matrix $A \in M(n \times n)$ ist genau dann orthogonal, wenn die Spalten- bzw. die Zeilenvektoren von A eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$ bilden.

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Spezielle Matrizen



Dreiecksmatrix

obere Dreiecksmatrix $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \in M(n \times n)$

untere Dreiecksmatrix $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M(n \times n)$

Rechnen mit Matrizen

Addition und Skalarmultiplikation

Seien $A = (a_{ik}), B = (b_{ik}) \in M(m \times n)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.
Dann ist die Addition definiert als

$$A + B := (a_{ik} + b_{ik}) \in M(m \times n)$$

und die Skalarmultiplikation definiert als

$$\lambda \cdot A := (\lambda \cdot a_{ik}) \in M(m \times n).$$

Rechnen mit Matrizen

Das Produkt zweier Matrizen (Matrizenprodukt)

Seien $A = (a_{ik}) \in M(m \times r)$ und $B = (b_{ik}) \in M(r \times n)$.
Dann ist das Matrizenprodukt definiert als

$$A \cdot B := (c_{ik}) \in M(m \times n),$$

wobei

$$c_{ik} := a_{i1} b_{1k} + \ldots + a_{ir} b_{rk}.$$

Das Element c_{ik} in der Produktmatrix $A \cdot B$ entspricht also dem Skalarprodukt des i-ten Zeilenvektors von A mit dem k-ten Spaltenvektor von B.

Rechnen mit Matrizen

Das Element c_{ik} in der Produktmatrix $A \cdot B$ entspricht also dem Skalarprodukt des i-ten Zeilenvektors von A mit dem k-ten Spaltenvektor von B.

5.1) Gegeben seien die Matrizen mit rellen Einträgen

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie falls möglich

$$2 \cdot A - C, \; B \cdot C, \; C \cdot B, \; B \cdot A, A^2 = A \cdot A, B^2 = B \cdot B$$

$$A \cdot (B + C), \; A \cdot B + A \cdot C,$$

Rechnen mit Matrizen

Rechenregeln für das Matrizenprodukt

Für Matrizen A, B, C und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

1) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
2) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
3) $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
4) $(\lambda A) \cdot B = A \cdot (\lambda B) = \lambda(A \cdot B)$

Die Matrizenmultiplikation ist nicht kommutativ, d.h. es gilt im Allgemeinen $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Die transponierte Matrix

auch „gestürzte“ oder „gespiegelte“ Matrix

Für $A = (a_{ik}) \in M(m \times n)$ ist die **Transponierte** definiert als

$$A^T := (a_{ki}) \in M(n \times m).$$

Die Transponierte von A entsteht also aus A, indem man Zeilen und Spalten vertauscht.

$A \in M(n \times n)$ heißt **symmetrisch**, wenn $A = A^T$.

$A \in M(n \times n)$ heißt **orthogonal**, wenn $A \cdot A^T = E_n$. **!**

Teste die Matrix A auf Orthogonalität:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Anwendung: Lineare Abbildungen

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$
$$\boxed{\vec{x}} \mapsto \boxed{A\vec{x}}$$

Abbildung eines Vektors auf einen Bildvektor

Lineare Abbildungen: Z.B. Drehung

- Drehung um die x-Achse:

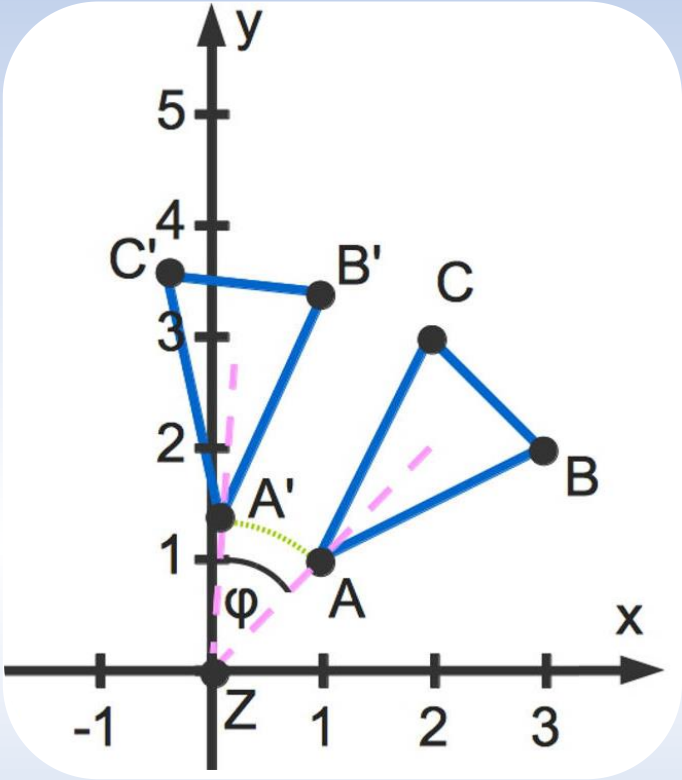
$$R_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

- Drehung um die y-Achse:

$$R_y(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

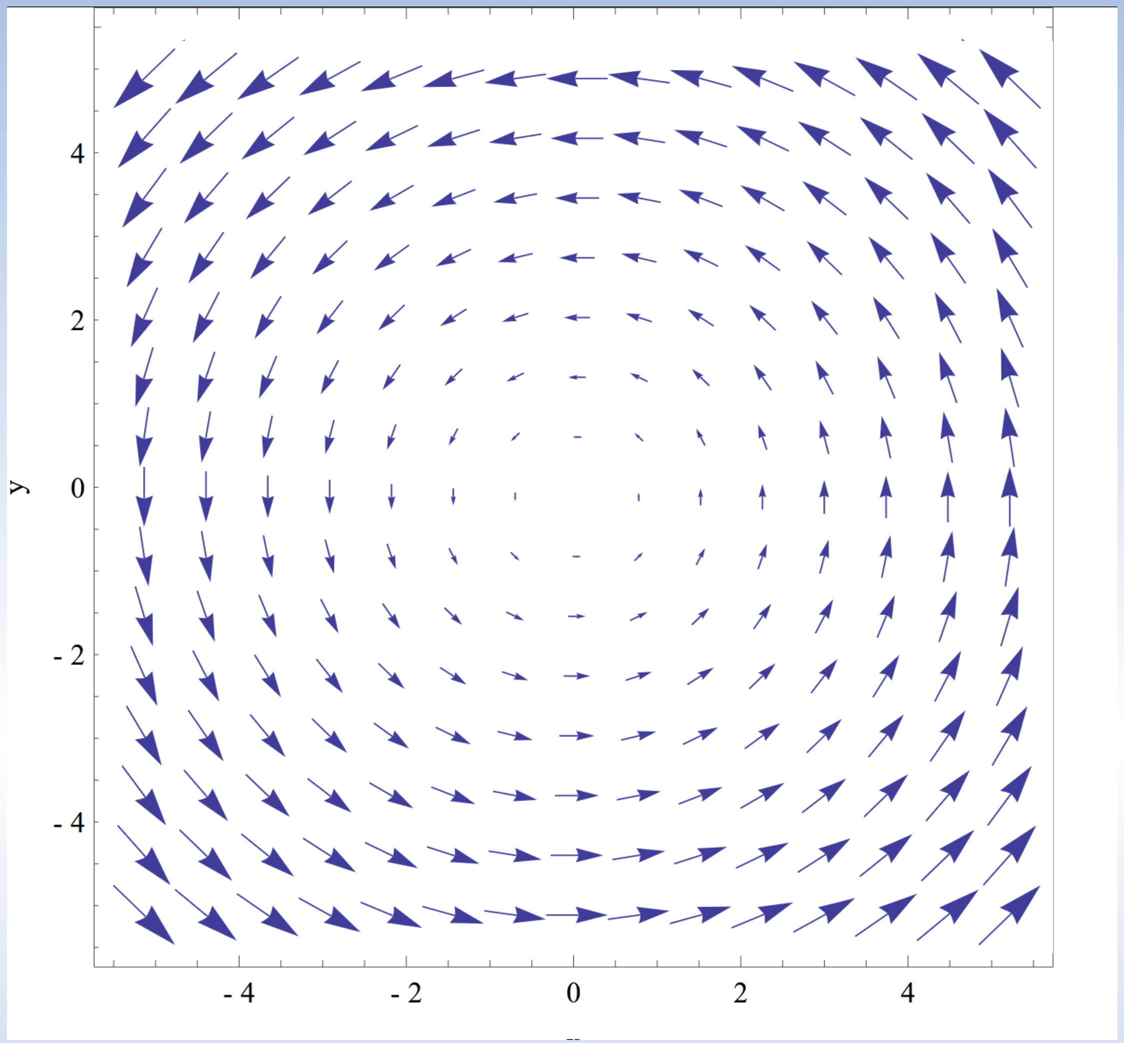
- Drehung um die z-Achse:

$$R_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

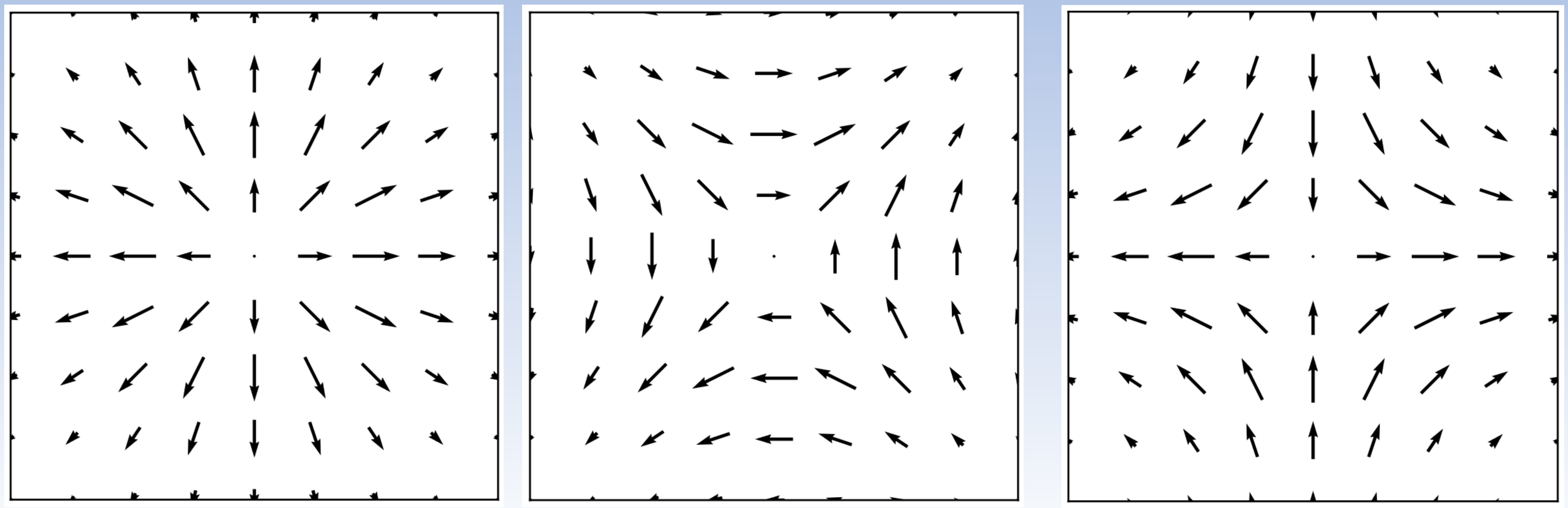


Lineare Abbildungen: Drehung

Ortsänderung
eines Punktes
bei Drehung:



Weitere Abbildungen



$f : \vec{x} \mapsto A\vec{x}$ ist umkehrbar $\Leftrightarrow$ A ist invertierbar

Umkehrabbildung $f^{-1} : \vec{x} \mapsto A^{-1}\vec{x}$